

Международный научно-исследовательский журнал

«Прогрессивная экономика»

№ 6 / 2024 https://progressive-economy.ru/vypusk_1/voprosy-optimalnogo-upravleniya-resursami/

Научная статья / Original article

Шифр научной специальности ВАК: 5.2.3

УДК 330.4:338.2

DOI: 10.54861/27131211_2024_6_172



ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ

Губарева Е.А., кандидат физико-математических наук, Государственный университет управления, г. Москва, Россия

Аннотация. Данная посвящена решению задач оптимального управления ресурсами, основное внимание уделено процессу обоснования выбора оптимального решения из возможных вариантов, ограниченных определенными условиями. Показано, что задачи выбора оптимального решения во многих случаях сводятся к гладким оптимизационным задачам с ограничениями в виде равенств и неравенств, что позволяет использовать математические методы. Автором предложен общий алгоритм решения задачи оптимального распределения ограниченных средств на закупку ресурсов, необходимых для производства двух видов продукции. Задача заключается в нахождении такой стратегии распределения ресурсов, при которой предприятие сможет получить максимальную прибыль. Представленный алгоритм предполагает привлечение к решению поставленной задачи аппарата дифференциального исчисления функции нескольких переменных. Центральное место в предложенном алгоритме занимает задача определения границы множества производственных возможностей, которое зависит от бюджета, который выделяет производитель на закупку необходимых для выпуска объемов ресурсов. Для этого используется модель «ящик Эджворта». Для производственных функций, коэффициенты эластичности которых связаны определенными соотношениями, решение задачи построения множества производственных представлено в явном виде. Показано, что применение математических методов оптимизации позволяет экономическим субъектам принимать обоснованные и эффективные решения, что в конечном итоге ведет к улучшению финансовых показателей и способствует обеспечению высокой конкурентоспособности.

Ключевые слова: модель оптимизации, прибыль, производственная функция, оптимизация управления ресурсами, ящик Эджворта.

ISSUES OF OPTIMAL RESOURCE MANAGEMENT

Gubareva E.A., *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, State University of Management, Moscow, Russia*

Abstract. This article is devoted to solving problems of optimal resource management, the main attention is paid to the process of substantiating the choice of the optimal solution from possible options limited by certain conditions. It is shown that the problems of choosing the optimal solution in many cases are reduced to smooth optimization problems with constraints in the form of equalities and inequalities, which allows the use of mathematical methods. The author proposes a general algorithm for solving the problem of optimal allocation of limited funds for the purchase of resources necessary for the production of two types of products. The task is to find a resource allocation strategy in which the company will be able to maximize profits. The presented algorithm assumes the involvement of the differential calculus apparatus of the function of several variables in solving the problem. The central place in the proposed algorithm is occupied by the task of determining the boundary of the set of production capabilities, which depends on the budget that the manufacturer allocates for the purchase of the necessary volumes of resources for production. The "Edgeworth box" model is used for this purpose. For production functions, the elasticity coefficients of which are related by certain ratios, the solution to the problem of constructing a set of production functions is presented explicitly. It is shown that the use of mathematical optimization methods allows economic entities to make informed and effective decisions, which ultimately leads to an improvement in financial performance and contributes to ensuring high competitiveness.

Keywords: optimization model, profit, production function, resource management optimization, Edgeworth box.

JEL classification: C61, D21, A22.

Для цитирования: Губарева Е.А. Вопросы оптимального управления ресурсами // Прогрессивная экономика. 2024. № 6. С. 172–185. DOI: 10.54861/27131211_2024_6_172.

Статья поступила в редакцию: 22.06.2024 г. Одобрена после рецензирования: 04.07.2024 г. Принята к публикации: 05.07.2024 г.

For citation: Gubareva E. A. Issues of optimal resource management // Progressive Economy. 2024. No. 6. pp. 172–185. DOI: 10.54861/27131211_2024_6_172.

The article was submitted to the editorial office: 22/06/2024. Approved after review: 04/07/2024. Accepted for publication: 05/07/2024.

Введение

В настоящей статье предлагается авторский подход к решению задачи распределения фиксированного бюджета на закупку различных ресурсов, необходимых для производства, с целью получения максимального экономического эффекта в результате их использования. Исследовательская цель заключается в разработке алгоритма решения задачи оптимального распределения ограниченных средств на закупку ресурсов, необходимых для производства двух видов продукции.

Основной задачей исследования является обоснование алгоритма нахождения такой стратегии распределения ресурсов, которая обеспечивает максимальную прибыль предприятия. Актуальность темы исследования обусловлена тем, что оптимизация управления ресурсами представляет собой ключевой аспект повышения эффективности производственной деятельности. В современных условиях, характеризующихся ограниченностью финансовых возможностей и постоянных изменений рыночной среды, предприятиям необходимо эффективно распределять имеющиеся ресурсы для достижения конкурентных преимуществ.

Поскольку в процессе принятия решения производится выбор из множества допустимых вариантов [6], обозначим за Ω – множество всех возможных стратегий, содержание данного множества определяется ограничениями, накладываемыми на бюджет. Если за φ - принять стратегию, а за $\pi(\varphi)$ - значение критерия качества (эффекта), полученное в результате использования стратегии φ , то можно сформулировать оптимизационную задачу следующим образом (1):

$$\begin{cases} \pi(\varphi) \rightarrow \max \\ \varphi \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Безусловно, один из вариантов решения такой задачи – это перебор всех стратегий из множества Ω с целью выбора той, для которой критерий качества примет наибольшее значение. Однако, такой подход будет затруднен, а может, и невозможен, если множество Ω содержит бесконечное число элементов.

В том случае, когда объект представляется возможным описать на языке математики, для решения такой задачи может быть построена математическая модель, анализ и решение которой будут проведены с использованием математического инструментария. Предположим, что имеющиеся объемы двух видов ресурсов (оборудования) K и L необходимо распределить между производствами двух видов продукции в количествах x и y соответственно. Зависимость выпуска продукции от объемов используемых ресурсов может быть задана аналитически (2):

$$x = f_x(K, L) \text{ и } y = f_y(K, L) \quad (2)$$

При этом средства, выделяемые предприятием на оплату этих ресурсов, ограничены объемом бюджета в M ден. ед. В нашем исследовании предполагается, что цены на ресурсы постоянны и равны p_K и p_L соответственно. Стратегия φ будет определяться объемами ресурсов, которые используются для выпуска продукции первого и второго вида (3):

$$\varphi = (K_x; K_y; L_x; L_y) \quad (3)$$

Если за критерий эффекта от выбранной стратегии принять прибыль $\pi(x; y)$, которую получит предприятие за период времени T , то задача может быть формализована следующим образом (4):

$$\begin{aligned} \pi(x; y) \rightarrow \max \\ \begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ x = f_x(K_x, L_x), \\ y = f_y(K_y, L_y), \\ p_K(K_x + K_y) + p_L(L_x + L_y) \leq M. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Итогом решения поставленной задачи будет оптимальная стратегия $\varphi_{opt} = (K_x^*; K_y^*; L_x^*; L_y^*)$, обеспечивающая предприятию максимальную прибыль.

Обзор литературы

В случае, когда граница множества, заданного системой, описывается аналитически как $F(x; y) = 0$, получаем классическую задачу [4; 5] нахождения глобального экстремума функции двух переменных (5):

$$\begin{aligned} \pi(x, y) \rightarrow \max \\ \begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ F(x, y) \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Методы решения задачи (5) которой хорошо известны (например, градиентный метод, который будет использоваться в работе) [1; 5; 7].

В работе [2] предлагается алгоритм решения сформулированной задачи оптимального управления ресурсами для производственных функций вида $f(K, L) = A(KL)^\alpha$. В общем случае этот алгоритм будет иметь вид:

1 шаг (основной). Определяем границу множества производственных возможностей $F(x; y) = 0$.

2 шаг. Решаем задачу (6):

$$\begin{aligned} \pi(x, y) \rightarrow \max \\ \begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ F(x; y) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Получаем оптимальные объемы выпуска продукции (x_{onm}, y_{onm}) , как координаты точки касания линии $F(x; y) = 0$ и линии постоянной прибыли $\pi(x, y) = const$.

3 шаг. Оптимальную стратегию $\varphi_{onm} = (K_x^*; K_y^*; L_x^*; L_y^*)$, обеспечивающую выпуск в объемах (x_{onm}, y_{onm}) , получаем из системы уравнений (7):

$$\begin{cases} f_x(K_x^*, L_x^*) = x_{onm}, \\ f_y(K_y^*, L_y^*) = y_{onm}, \\ K_x^* + K_y^* = K^*, \\ L_x^* + L_y^* = L^*, \\ p_K K^* + p_L L^* = M. \end{cases} \quad (7)$$

Как видим, основная проблема [3; 4; 2; 9] состоит в нахождении уравнения линии $F(x; y) = 0$, ограничивающей множество производственных возможностей [2; 11].

Материалы и методы

Чтобы получить уравнение границы $F(x, y) = 0$ множества производственных возможностей, можно использовать различные математические методы (аналитические и геометрические), в том числе и методы, используемые для нахождения оптимальных решений [3; 9]. Так как рассматриваются функции двух переменных, то в дальнейшем будем использовать градиентный метод. На первом шаге построения кривой $F(x, y) = 0$ будем использовать «ящик Эджворта» [7].

Модель «ящик Эджворта», или как ее еще называют «модель 2×2 », позволяет определить максимально возможный выпуск одного из видов продукции (например y), если фиксирован объем выпуска другого вида продукции (x), при наличии ресурсов в ограниченных объемах K_i и L_i соответственно (8):

$$\begin{cases} f_y(K_y, L_y) \rightarrow \max \\ K_x \geq 0, L_x \geq 0, \\ f_x(K_x, L_x) = X_0, \\ K_x + K_y = K_i, \\ L_x + L_y = L_i. \end{cases} \quad (8)$$

Координаты точки касания $M_0(K_x^*, L_x^*)$ изоквант $f_x(K_x, L_x) = X_0$ и $f_y(K_y, L_y) = \text{const}$, построенных в системе координат «ящика Эджворта» [9] (рисунк 1), определяют объемы ресурсов, используемые для выпуска продукции первого вида в количестве X_0 , но при этом остаток ресурсов обеспечивает максимально возможный выпуск продукции второго вида.

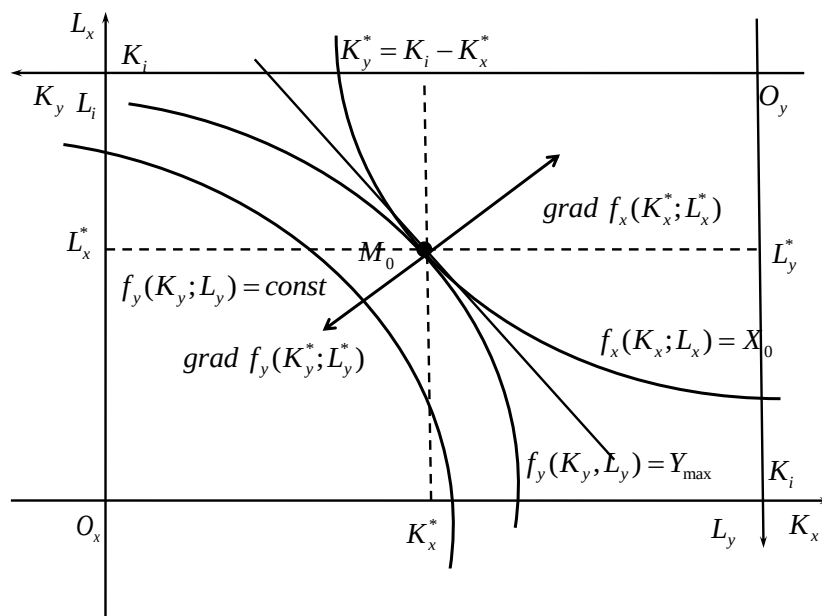


Рис. 1. Ящик Эджворта
Источник: составлено автором

Координаты точки $M_0(K_x^*, L_x^*)$ находятся из системы уравнений (9):

$$\begin{cases} K_x \geq 0, L_x \geq 0, \\ f_x(K_x, L_x) = X_0, \\ \frac{\partial f_x}{\partial K_x} = \frac{\partial f_y}{\partial K_y}, \\ \frac{\partial f_x}{\partial L_x} = \frac{\partial f_y}{\partial L_y}, \\ L_x + L_y = L_i, \\ K_x + K_y = K_i. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим точки касания изоквант $f_x = X_0$ и $f_y = \text{const}$ для всех $X_0 \in [0; f_x(K_i; L_i)]$. Каждая точка касания (K_x^*, L_x^*) определяет пару (X_0^*, Y_0^*) , а именно координаты точки, лежащей на кривой, ограничивающей множество

производственных возможностей при использовании ресурсов в объема K_i и L_i .

Результаты и обсуждение

Теперь перейдем к выводу уравнения $F(x, y) = 0$ и построению множества производственных возможностей. Решим эту задачи в два этапа. Сначала, используя модель «ящик Эджворта», для каждой фиксированной пары значений K_i и L_i , таких, что выполняется условие $p_K K_i + p_L L_i \leq M$, строим множество производственных возможностей, то есть задаем кривую $F_i(x, y) = 0$, его ограничивающую.

Кривая $F(x, y) = 0$ будет являться «ограничивающей» кривых $F_i(x, y) = 0$, то есть, если точка $M(x; y)$ принадлежит множеству, ограниченному кривой $F(x, y) = 0$, то найдется такая пара (K_i, L_i) , что точка будет принадлежать множеству, ограниченному кривой $F_i(x, y) = 0$ и наоборот, если точка $M(x; y)$ принадлежит множеству, ограниченному кривой $F_i(x, y) = 0$, то она принадлежит и множеству, ограниченному кривой $F(x, y) = 0$.

Построим множество производственных возможностей двухпродуктовой фирмы, выпускающей два вида продукции в количествах x и y соответственно, если объемы выпуска определяются производственными функциями типа Кобба-Дугласа (10):

$$x(K_1, L_1) = A \left(\frac{K_1}{K_0} \right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^\beta, \quad y(K_2, L_2) = B \left(\frac{K_2}{K_0} \right)^\gamma \left(\frac{L_2}{L_0} \right)^\delta \quad (10)$$

При этом объем производственных фондов не превосходит K_0 усл. ед., а объем трудовых ресурсов не превосходит L_0 усл. ед.

Для того, чтобы построить множество производственных возможностей найдем максимально возможный объем выпуска $y^{\max}$ продукции второго вида для каждого фиксированного значения $x = x^0$. Для этого решим оптимизационную задачу (11):

$$\begin{aligned} & y(K_2, L_2) \rightarrow \max \\ & \begin{cases} K_1 \geq 0, \quad L_1 \geq 0, \\ x(K_1, L_1) = x^0, \\ K_1 + K_2 = K_0, \\ L_1 + L_2 = L_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Точка, определяющая максимальный выпуск продукции второго вида $y^{\max}$, является точкой касания изоквант $A\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^\beta = x^0$ и $B\left(\frac{K_2}{K_0}\right)^\gamma \left(\frac{L_2}{L_0}\right)^\delta = y^{\max}$. Координаты точки (K_1^*, L_1^*) находятся из системы уравнений (12):

$$\begin{cases} K_1 \geq 0, K_1 + K_2 = K_0, \\ x(K_1, L_1) = x^0, \\ \frac{\partial x}{\partial K_1} = \frac{\partial x}{\partial K_2}, \\ \frac{\partial x}{\partial L_1} = \frac{\partial x}{\partial L_2}, \\ L_1 \geq 0, L_1 + L_2 = L_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 \geq 0, K_1 + K_2 = K_0, \\ A\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^\beta = x^0, \\ \frac{\alpha \cdot L_1}{\beta \cdot K_1} = \frac{\gamma \cdot L_2}{\delta \cdot K_2}, \\ L_1 \geq 0, L_1 + L_2 = L_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 \geq 0, K_1 + K_2 = K_0, \\ A\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^\beta = x^0, \\ \frac{\alpha \delta L_1}{\beta \gamma K_1} = \frac{L_0 - L_1}{K_0 - K_1}, \\ L_1 \geq 0, L_1 + L_2 = L_0. \end{cases} \quad (12)$$

Если выполняется равенство $\frac{\alpha \delta}{\beta \gamma} = 1$ (частный случай) то система примет вид (13):

$$\begin{cases} K_1 \geq 0, K_1 + K_2 = K_0, \\ A\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^\beta = x^0, \\ \frac{L_1}{K_1} = \frac{L_0 - L_1}{K_0 - K_1}, \\ L_1 \geq 0, L_1 + L_2 = L_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 \geq 0, K_1 + K_2 = K_0, \\ A\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\alpha \left(\frac{K_1}{K_0}\right)^\beta = x^0, \\ L_1 = \frac{L_0 K_1}{K_0}, \\ L_1 \geq 0, L_1 + L_2 = L_0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1^* = L_0 \left(\frac{x^0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \\ K_1^* = K_0 \left(\frac{x^0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \end{cases} \quad (13)$$

Подставив значения K_1^* и L_1^* в производственную функцию, получим максимально возможный объем выпуска продукции второго вида (14):

$$y^{\max} = B \left(\frac{1}{K_0} \left(K_0 - K_0 \left(\frac{x^0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right) \right)^\gamma \left(\frac{1}{L_0} \left(L_0 - L_0 \left(\frac{x^0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right) \right)^\delta = B \left(1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right)^{\gamma+\delta} \quad (14)$$

Таким образом, имеем, что для каждого фиксированного объема выпуска продукции первого вида x^0 объем выпуска y продукции второго вида

не может быть больше, чем $B \left(1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right)^{\gamma+\delta}$, то есть $y \leq B \left(1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right)^{\gamma+\delta}$.

Преобразуем последнее неравенство для произвольного значения x (15):

$$y \leq B \left(1 - \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right)^{\gamma+\delta} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma+\delta}} \leq 1 - \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma+\delta}} \leq 1 \quad (15)$$

Это означает, система (16):

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma+\delta}} \leq 1, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

задает множество производственных возможностей - область первой четверти, ограниченную кривой, уравнение которой $\left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma+\delta}} = 1$.

Если производственные функции являются функциями Кобба-Дугласа ($\alpha + \beta = 1$, $\gamma + \delta = 1$), то множество производственных возможностей ограничено прямой $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$. Если $\alpha + \beta = 0,5$ и $\gamma + \delta = 0,5$, то множество производственных возможностей ограничено эллипсом $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.

Граница множества производственных возможностей, является параболой $y = B \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)$, если $\alpha + \beta = 0,5$ и $\gamma + \delta = 1$, или параболой $x = B \left(1 - \frac{y^2}{A^2} \right)$, если $\alpha + \beta = 1$ и $\gamma + \delta = 0,5$.

Переходим ко второму шагу. На первом шаге мы строили множество производственных возможностей исходя из того, что у нас имеются ограничения на объемы имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов. Теперь перейдем к условию, что ограничения на закупку ресурсов определяются ограниченным бюджетом. Построим множество производственных

возможностей фирмы, если издержки фирмы на приобретение ресурсов не могут превышать M д. ед. При этом $x(K_1, L_1) = AK_1^\alpha L_1^\beta$, $y(K_2, L_2) = BK_2^\gamma L_2^\delta$.

Решение этой задачи начнем с построения множества производственных возможностей для фиксированной пары значений (K_0, L_0) , такой, что выполняется условие $p_K K_0 + p_L L_0 = M$. Для этого надо решить уже знакомую оптимизационную задачу (17):

$$\begin{aligned} y(K_2, L_2) &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} K_1 \geq 0, L_1 \geq 0, \\ x(K_1, L_1) = x^0, \\ K_1 + K_2 = K_0, \\ L_1 + L_2 = L_0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (17)$$

Если для каждой выбранной пары (K_0, L_0) представить производственные функции в виде (18):

$$x(K_1, L_1) = AK_0^\alpha L_0^\beta \left(\frac{K_1}{K_0} \right)^\alpha \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^\beta, \quad y(K_2, L_2) = BK_0^\gamma L_0^\delta \left(\frac{K_2}{K_0} \right)^\gamma \left(\frac{L_2}{L_0} \right)^\delta \quad (18)$$

то мы можем воспользоваться уже полученным на первом шаге результатом. А именно, множество производственных возможностей для выбранной пары (K_0, L_0) определяется системой (19):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x}{AK_0^\alpha L_0^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{y}{BK_0^\gamma L_0^\delta} \right)^{\frac{1}{\gamma+\delta}} \leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

Если $\alpha + \beta = 1$ и $\gamma + \delta = 1$, то каждая пара (K_0, L_0) определяет прямоугольный треугольник (20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{AK_0^\alpha L_0^\beta} + \frac{y}{BK_0^\gamma L_0^\delta} \leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{array} \right. \quad (20)$$

Объединение всех этих треугольников дает множество производственных возможностей, соответствующее бюджетному ограничению. Если гипотенузы этих треугольников параллельны ($\alpha = \gamma$,

$\beta = \delta$), то для каждой пары (K_0, L_0) , удовлетворяющей условию $p_K K_0 + p_L L_0 = M$, системы вида (21):

$$\begin{cases} \frac{x}{A} + \frac{y}{B} \leq K_0^\alpha L_0^\beta, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (21)$$

будут определять множества точек, представляющие собой прямоугольные треугольники, ограниченные осями координат и параллельными прямыми $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = K_0^\alpha L_0^\beta$ (см. рисунок 2).

«Огибающей» кривой этих множеств будет одна из этих прямых, а именно та, для которой значение правой части принимает максимально возможное значение при существующих ограничениях на значения K_0 и L_0 . Чтобы найти это значение, надо решить еще одну оптимизационную задачу (22):

$$\begin{aligned} & K_0^\alpha L_0^\beta \rightarrow \max \\ & \begin{cases} p_K K_0 + p_L L_0 = M, \\ K_0 \geq 0, L_0 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Задачу (22) можно решить, используя геометрический метод, то есть воспользуемся тем фактом, что в точке условного максимума градиенты целевой функции и функции связи коллинеарны (23):

$$\begin{cases} p_K K_0 + p_L L_0 = M, \\ \frac{(K_0^\alpha L_0^\beta)'_{K_0}}{(K_0^\alpha L_0^\beta)'_{L_0}} = \frac{(p_K K_0 + p_L L_0)'_{K_0}}{(p_K K_0 + p_L L_0)'_{L_0}} \\ K_0 \geq 0, L_0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_K K_0 + p_L L_0 = M, \\ \frac{\alpha L_0}{\beta K_0} = \frac{p_K}{p_L}, \\ K_0 \geq 0, L_0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_0^* = \frac{M\alpha}{p_K(\alpha + \beta)}, \\ L_0^* = \frac{M\beta}{p_L(\alpha + \beta)}. \end{cases} \quad (23)$$

Так как мы рассматриваем случай, когда $\alpha + \beta = 1$, то получаем, что уравнение огибающей кривой имеет вид (24):

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = (K_0^*)^\alpha (L_0^*)^\beta \Leftrightarrow \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = M \left(\frac{\alpha}{p_K} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_L} \right)^\beta \quad (24)$$

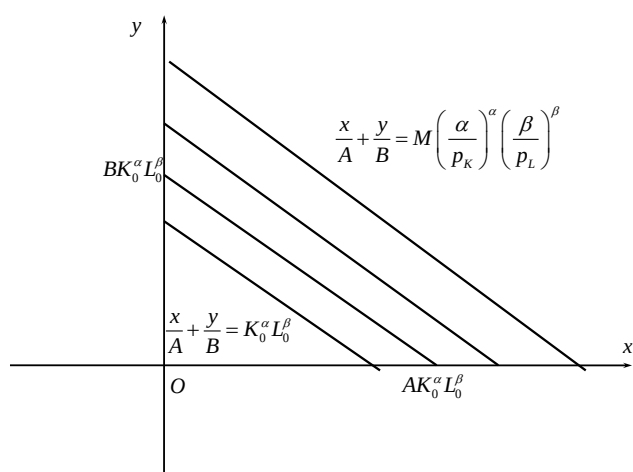


Рис. 2. Построение огибающей кривой

Источник: составлено автором

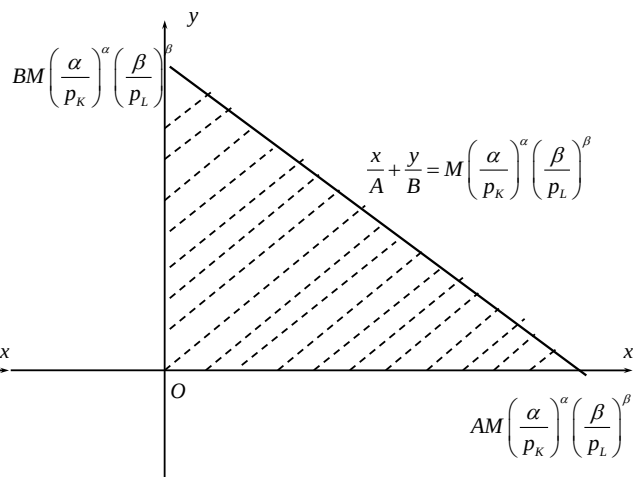


Рис. 3. Множество производственных возможностей

Источник: составлено автором

Множеством производственных возможностей является прямоугольный треугольник (см. рисунок 3), уравнения сторон которого $x=0$, $y=0$ и $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = M \left(\frac{\alpha}{p_K} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_L} \right)^\beta$. Так как точка с координатами (x_{onm}, y_{onm}) лежит на построенной «огибающей», то можно сделать вывод, что для производства оптимального объема продукции необходимо распределить бюджет таким образом, чтобы закупить ресурсы в количествах K_0^* и L_0^* соответственно. Распределение закупленных ресурсов между видами продукции (оптимальная стратегия) будет получено в результате решения системы (25):

$$\begin{cases} f_x(K_x^*, L_x^*) = x_{onm}, \\ f_y(K_y^*, L_y^*) = y_{onm}, \\ K_x^* + K_y^* = K_0^*, \\ L_x^* + L_y^* = L_0^*. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогично строится «огибающая» для случая, когда $\alpha + \beta = 0,5$, $\gamma + \delta = 0,5$ и $\alpha = \gamma$. Множеством производственных возможностей в этом случае является часть первой четверти, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$ и эллипсом $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sqrt{2M} \left(\frac{\alpha}{p_K} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_L} \right)^\beta$.

Таким образом, получены уравнения огибающих для производственных функций, коэффициенты эластичности которых удовлетворяют условиям: $\alpha + \beta = 1$, $\gamma + \delta = 1$ и $\alpha = \gamma$, а также условиям $\alpha + \beta = 0,5$, $\gamma + \delta = 0,5$ и $\alpha = \gamma$.

Предложенный алгоритм может быть использован для повышения экономической эффективности хозяйственной деятельности, а его модификации могут быть внедрены в системы стратегического планирования современных предприятий.

Заключение

В работе были продемонстрированы возможности, предоставляемые в области математики, для решения задачи оптимального распределения имеющегося ограниченного бюджета для получения наибольшей выгоды. При этом, помимо общего алгоритма решения этой задачи, для производственных функций определенного вида решение получено в явном виде. Отметим также, что рассматриваемая в статье проблема имеет широкое прикладное применение в области экономики и управления производством.

Прежде всего, предложенный математический инструментарий применим для решения задач оптимизации использования ограниченных ресурсов для достижения максимальной прибыли. В частности, предложенный алгоритм может быть использован предприятиями для эффективного распределения ресурсов между различными видами продукции, обоснования принятия решений о закупках, в процессах стратегического планирования и т.д.

Использование математических методов оптимизации, описанных в статье, позволяет предприятиям принимать более обоснованные и эффективные управленческие решения, что в конечном итоге ведет к улучшению их финансовых показателей и повышению конкурентоспособности.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: «Наука», 1979. 429 с.
2. Губарева Е.А., Нольде Е.Л. Задача оптимального управления ресурсами // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2022. Т. 12. № 2А. С. 47–57.
3. Губарева Е.А., Паршикова Г. Ю., Перфильев А.А., Кутернин М.И. Математика и экономика. Часть 2. Оптимизационные задачи. М.: Издательский дом ГУУ. 2021. 59 с.
4. Губарева Е.А., Паршикова Г.Ю., Перфильев А.А. Математическая составляющая оптимального управления // Мягкие измерения и вычисления. 2022. Том 53, Номер 4. С. 65–72.
5. Губарева Е.А., Паршикова Г.Ю., Перфильев А.А. Математические методы решения задач экономики. М.: Манускрипт, 2023. 132 с.

6. Ефимов В.В., Чередниченко Н.Д. Методы теории принятия решений, как инструмент выбора технологии производства работ // Строительное производство. 2020. № 1. С. 38–40.
7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975 (2012). 600 с.
8. Конюховский П.В. Модель управления финансовым ресурсом при неопределенности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика. 1999. № 2. С. 89–96.
9. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: «Изограф», 1997. 224 с.
10. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики. М.: НВТ-Дизайн, 2002. 256 с.
11. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. М.: «е_Тест», 2011. 336 с.

References

1. Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie. M.: «Nauka», 1979. 429 s.
2. Gubareva E.A., Nol'de E.L. Zadacha optimal'nogo upravleniya resursami // Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra. 2022. T. 12. № 2A. S. 47–57.
3. Gubareva E.A., Parshikova G. YU., Perfil'ev A.A., Kuternin M.I. Matematika i ekonomika. CHast' 2. Optimizacionnye zadachi. M.: Izdatel'skij dom GUU. 2021. 59 s.
4. Gubareva E.A., Parshikova G. YU., Perfil'ev A.A. Matematicheskaya sostavlyayushchaya optimal'nogo upravleniya // Myagkie izmereniya i vychisleniya. 2022. Tom 53, Nomer 4. S. 65–72.
5. Gubareva E.A., Parshikova G. YU., Perfil'ev A.A. Matematicheskie metody resheniya zadach ekonomiki. M.: Manuscript, 2023. 132 s.
6. Efimov V.V., CHerednichenko N.D. Metody teorii prinyatiya reshenij, kak instrument vybora tekhnologii proizvodstva rabot // Stroitel'noe proizvodstvo. 2020. № 1. S. 38–40.
7. Intriligator M. Matematicheskie metody optimizacii i ekonomicheskaya teoriya. M.: Progress, 1975 (2012). 600 s.
8. Konyuhovskij P.V. Model' upravleniya finansovym resursom pri neopredelennosti // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ekonomika. 1999. № 2. S. 89–96.
9. Lebedev V.V. Matematicheskoe modelirovanie social'no-ekonomicheskikh processov. M.: «Izograf», 1997. 224 s.
10. Lebedev V.V., Lebedev K.V. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie ekonomiki. M.: NVT-Dizajn, 2002. 256 s.
11. Lebedev V.V., Lebedev K.V. Matematicheskoe modelirovanie nestacionarnyh ekonomicheskikh processov. M.: «e_Test», 2011. 336 s.