

Международный научно-исследовательский журнал

«Прогрессивная экономика»

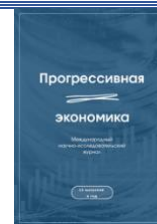
№ 1 / 2026 https://progressive-economy.ru/vypusk_1/variant-ustanovleniya-razreshimosti-integralnogo-uravneniya-volterra-vtorogo-roda/

Научная статья / Original article

Шифр научной специальности ВАК: 5.2.3

УДК 517.5

DOI: 10.54861/27131211_2026_1_131



ВАРИАНТ УСТАНОВЛЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

Шипов Н.В., кандидат физико-математических наук, доцент.

*Мытищинский филиал Московского государственного технического
университета им. Н.Э. Баумана, г. Мытищи, Россия
141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1*

Аннотация. Целью настоящей статьи является установление разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В зависимости от начальных условий и вида внешнего воздействия на исследуемую систему, указанные уравнения могут не иметь ни одного решения, могут иметь либо одно единственное решение, либо иметь множество решений. Рассматривается вариант доказательства разрешимости и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром. Для решения задачи применяется принцип сжимающих отображений для анализа оператора Вольтерра с ограниченным ядром в приложении к следствиям теорем Фредгольма. Доказано существование и единственность решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром применением принципа сжимающих отображений к альтернативе Фредгольма. Приведенный метод может быть использован при анализе разрешимости интегральных уравнений в других пространствах, отличающихся от гильбертова пространства. Установление условий разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром обеспечивает формальную основу для корректного решения задач, в которых поведение экономической системы зависит от накопленного эффекта предыдущих воздействий, например, при прогнозировании спроса, моделировании инвестиционных потоков или анализе динамики цен в условиях временных лагов. Работа имеет теоретическую и прикладную экономическую значимость. Результаты могут быть применены в качестве инструмента повышения точности моделирования процессов, где решающую роль играет интегральная зависимость между параметрами. Например, полученные выводы могут быть использованы в финансовой математике для анализа поведения сложных динамических систем.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра второго рода, альтернатива Фредгольма, гильбертово пространство, компактный оператор.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

Для цитирования: Шипов Н.В. Вариант установления разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода. 2026. № 1. С. 131–144. https://doi.org/10.54861/27131211_2026_1_131.

Статья поступила в редакцию: 21.12.2025 г. Одобрена после рецензирования: 23.01.2026 г. Принята к публикации: 24.01.2026 г.

OPTION FOR ESTABLISHING THE SOLVABILITY OF THE VOLTAIRE INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

*Shipov N.V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mytishchi branch of the Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Mytishchi, Russia
1-ya Institutskaya str., Mytishchi, Moscow region, 141005*

Abstract. The aim of the work is to establish the solvability of the Volterra integral equation of the second kind. Depending on the initial conditions and the type of external influence on the system under study, these equations may not have a single solution, they may have either one single solution, or they may have multiple solutions. A variant of the proof of the solvability and uniqueness of the solution of the Volterra integral equation of the second kind with a bounded kernel is considered. To solve the problem, the principle of compressive maps is applied to analyze the Volterra operator with a bounded kernel in application to the consequences of Fredholm's theorems. The existence and uniqueness of a solution of the Volterra integral equation of the second kind with a limited kernel is proved by applying the principle of compressive maps to the Fredholm alternative. The above method can be used to analyze the solvability of integral equations in other spaces other than Hilbert space. The establishment of conditions for the solvability of the Volterra integral equation of the second kind with a limited core provides a formal basis for the correct solution of problems in which the behavior of the economic system depends on the accumulated effect of previous impacts, for example, in forecasting demand, modeling investment flows or analyzing price dynamics in conditions of time lags. The work has theoretical and applied economic significance. The results can be used as a tool to improve the accuracy of process modeling, where the integral relationship between the parameters plays a crucial role. For example, the findings can be used in financial mathematics to analyze the behavior of complex dynamic systems.

Keywords: Volterra integral equations of the second kind, Fredholm alternative, Hilbert space, compact operator.

JEL classification: C02, C60, C61, C63, C65.

Conflict of interest. The author declares that there is no conflict of interest.



For citation: Shipov N.V. (2026). Variant ustanovleniya razreshimosti integralnogo uravneniya voltera второго рода [Option for establishing the solvability of the voltera integral equation of the second kind]. Progressivnaya ekonomika [Progressive Economy], 1, 131–144, https://doi.org/10.54861/27131211_2026_1_131 (In Russ., abstract in Eng.)

The article was submitted to the editorial office: 21/12/2025. Approved after review: 23/01/2026. Accepted for publication: 24/01/2026.

Введение

К линейным интегральным уравнениям сводятся многие задачи в экономике, маркетинге, социологии, также как и в строительной механике и в более общих разделах математической физики. Например, деформация (прогиб) струны (в частности, канатной дороги) определенной длины и натяжения под действием силы с заданной плотностью в фиксированной точке, которая уравнивается указанным натяжением, описывается линейными интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода. В настоящей работе рассматриваются отдельные варианты решений линейных интегральных уравнения Фредгольма специального вида, в частности интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода. В зависимости от начальных условий и вида внешнего воздействия на исследуемую систему, указанные уравнения могут не иметь ни одного решения, могут иметь либо одно единственное решение, либо иметь множество решений. Для установления разрешимости интегральных уравнений используются методы последовательных приближений, методы регуляризации, метод сжимающих отображений, методы разложения в ряды по малому параметру и некоторые другие.

Целью настоящей работы является установление разрешимости и существование единственного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром. Применен принцип сжимающих отображений для анализа оператора Вольтерра с ограниченным ядром в приложении к следствиям теорем Фредгольма. Доказано существование и единственность решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром применением принципа сжимающих отображений к альтернативе Фредгольма.

Обзор литературы

Для установления разрешимости интегральных уравнений используются методы последовательных приближений, методы регуляризации, метод сжимающих отображений, методы разложения в ряды по малому параметру и некоторые другие [1–4]. Классические уравнения вида Вольтерра с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией (то есть сведения к корректным задачам, см., например, [5; 6]). Задачи исследование интегральных уравнений Вольтерра первого рода с



квадратичной нелинейностью, когда ядра $K_1(t, s), K_2(t, s_1, s_2)$ являются непрерывными функциями каждого из своих аргументов и дифференцируемыми по переменной t , а правая часть $f \in C^1[a, b]$, рассмотрены в [7; 8]. Проведено численное исследование интегральных уравнений первого рода с квадратичной нелинейностью, являющихся частью обобщенного интегро-степенного ряда Вольтерра и описывающих динамические системы с одним входом $x(s)$ и одним выходом $y(t)$. Такие уравнения широко применяются в моделировании стационарных систем с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса [7].

Критерии существования неподвижной точки для отображения (оператора A) находят применение в различных областях приложений математики [2–4; 9], в частности, принцип сжимающих отображений может быть использован как один из возможных вариантов для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения, также как и для доказательства теоремы существования и единственности решения Коши систем дифференциальных уравнений. Отображение (оператор A) при этом не обязан быть линейным, но всегда является непрерывным [2–4]. Хорошо известен интерес к проблеме нахождения достаточных условий того, что преобразование из некоторого непустого множества имеет неподвижную точку и установления универсального критерия неподвижной точки [10]. Получены с помощью универсального критерия неподвижной точки необходимые и достаточные условия того, что выполняется гипотеза Римана о нулях дзета-функции Римана [10–12].

В настоящей работе, следуя [4], будем использовать одно из следствий принципа сжимающих отображений. Пусть в банаховом пространстве X задано отображение A , а отображение $B = A^n$ является сжимающим в X , то есть для B по основной теореме принципа сжимающих отображений уже существует единственная неподвижная точка $x, B(x) = x$ [4]. Поскольку операторы B и A перестановочны, то $B(A(x)) = A(B(x)) = A(x)$. Поэтому $A(x) = x$ в силу единственности неподвижной точки x для оператора B . Но тогда x является неподвижной точкой для оператора A . Если x_1 другая неподвижная точка для оператора A , $A(x_1) = x_1$, тогда $B(x_1) = A^n(x_1) = x_1$, то есть x_1 есть также неподвижная точка для оператора B . Поэтому в силу единственности неподвижной точки для оператора B получаем $x_1 = x$, то есть x является единственной неподвижной точкой также и для оператора A .

В рассмотренном выше следствии из принципа сжимающих отображений в качестве оператора A будем рассматривать оператор Вольтерра $Ax = \int_a^t K(t, s)x(s)ds$, где ядро оператора функция $K(t, s)$ двух переменных t, s предполагается ограниченной измеримой функцией. Поэтому

рассматриваемый оператор Вольтерра является A является линейным компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$, поскольку условие (6) ограниченности его нормы будет автоматически выполнено.

Материалы и методы

Методологическая основа исследования заключается в использовании метода сжимающих отображений с последующим применением известной [2–4] альтернативы Фредгольма к линейным неоднородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, частным случаем которых является неоднородное линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода и соответствующее ему однородное уравнения, как известно [1–3], имеют вид:

$$x - Ax = y, \quad (1)$$

$$x - Ax = 0, \quad (2)$$

где

$$Ax = \int_a^b K(t, s)x(s)ds \quad (3)$$

есть интегральный оператор Фредгольма, $x(s)$ является функцией, принадлежащей банаховому (гильбертовому) пространству $L_2[a, b]$, $K(t, s)$ – ядро оператора Фредгольма.

Наряду с уравнениями (1), (2) рассматриваются сопряженное уравнение

$$f - A^*f = g \quad (4)$$

и сопряженное однородное уравнение

$$f - A^*f = 0, \quad (5)$$

где f, g – линейные непрерывные функционалы из пространства X^* , а A^* – сопряженный оператор для оператора A в (3).

В предположении того, что функция $K(t, s)$ измерима и принадлежит классу $L_2[a, b]^2$ на квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$, получаем следующее ограничение на функцию $K(t, s)$:

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt < +\infty. \quad (6)$$

Если ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условию (6), то оператор A в (3) называется оператором Гильберта-Шмидта [2–4], при этом линейный оператор A оказывается вполне ограниченным (компактным):

$$\|A\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds dt < +\infty,$$

а значения Ax такого оператора A принадлежат классу $L_2[a, b]$ функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$. Таким образом оператор Гильберта-Шмидта каждую функцию $x(s)$, принадлежащую пространству $L_2[a, b]$, переводит в функцию $x(t)$ того же пространства $L_2[a, b]$, то есть A действует в гильбертовом пространстве, в частности линейный оператор $I - A$ в левой части (1), где I – тождественный оператор, является фредгольмовым.

Для того, чтобы линейный оператор был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был представлен в виде суммы непрерывно обратимого оператора и конечномерного, либо в виде суммы непрерывно обратимого и вполне непрерывного [3]. Поскольку область значений оператора $I - A$ замкнута, то по теореме Хаусдорфа [3] оператор $I - A$ нормально разрешим. Здесь I есть тождественный оператор. Если при этом ядро сопряженного оператора $I - A^*$ состоит только из нулевого элемента (альтернатива Фредгольма), то аналогично [5] уравнение (1) имеет единственное решение для любой правой части $y \in L_2[a, b]$.

Классические линейные интегральные уравнение Вольтерра первого и второго рода [2,3,6,7] соответственно имеют вид:

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad (7)$$

$$x(t) - \int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad (8)$$

где функции $x, y \in L_2[a, b]$.

В этом общем случае уравнение Вольтерра первого рода (7) не может быть разрешимо [2-4] при произвольной правой части $y \in L_2[a, b]$, что показывает рассмотрение простейшего ядра Вольтерра $K(t,s) = 1, a \leq s \leq t; K(t,s) = 0, t \leq s \leq b$.

Классические уравнения вида (7) с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией (то есть сведения к корректным задачам, см., например, [6]). Задачи исследование интегральных уравнений Вольтерра первого рода с квадратичной нелинейностью, когда ядра $K_1(t,s), K_2(t,s_1,s_2)$ являются непрерывными функциями каждого из своих аргументов и дифференцируемыми по переменной t , а правая часть $f \in C^1[a, b]$, рассмотрены в [7; 8]. Проведено численное исследование

интегральных уравнений первого рода с квадратичной нелинейностью, являющихся частью обобщенного интегро-степенного ряда Вольтерра и описывающих динамические системы с одним входом $x(s)$ и одним выходом $y(t)$. Такие уравнения широко применяются в моделировании стационарных систем с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса [7].

Уравнение (8) Вольтерра второго рода является частным случаем уравнения (1) Фредгольма второго рода, поскольку оператор Вольтерра $Ax = \int_a^t K(t,s)x(s)ds$ в левой части (8) является частным случаем оператора Фредгольма (3) с ядром $K(t,s)$, равным нулю при $s \geq t$.

Оператор Вольтерра A при выполнении неравенства (6) для ядра $K(t,s)$ является линейным вполне непрерывным (компактным) оператором [2–4], также как и сопряженный оператор A^* с комплексно-сопряженным ядром $\overline{K(s,t)}$.

Для доказательства существования и единственности решения $x \in L_2[a,b]$ уравнения Вольтерра второго рода (8) с ограниченным ядром используем альтернативу Фредгольма, а для доказательства существования и единственности нулевого решения однородного уравнения (2) с оператором Вольтерра используем следствие о существовании единственной неподвижной точки оператора, являющегося некоторой степенью сжимающего оператора [2–4].

В настоящей работе, следуя [1–2], используем одно из следствий принципа сжимающих отображений. Пусть в банаховом пространстве X задано отображение A , а отображение $B = A^n$ является сжимающим в X , то есть для B по основной теореме принципа сжимающих отображений уже существует единственная неподвижная точка $x, B(x) = x$ [1]. Поскольку операторы B и A перестановочны, то $B(A(x)) = A(B(x)) = A(x)$. Поэтому $A(x) = x$ в силу единственности неподвижной точки x для оператора B . Но тогда x является неподвижной точкой для оператора A . Если x_1 другая неподвижная точка для оператора A , $A(x_1) = x_1$, тогда $B(x_1) = A^n(x_1) = x_1$, то есть x_1 есть также неподвижная точка для оператора B . Поэтому в силу единственности неподвижной точки для оператора B получаем $x_1 = x$, то есть x является единственной неподвижной точкой также и для оператора A .

Другим следствием теоремы Фредгольма в такой редакции являются следующие утверждения (альтернатива Фредгольма [2]): для того, чтобы уравнение Фредгольма (1) имело единственное решение при любой правой части y , необходимо и достаточно, чтобы уравнение $Ax = x$ имело единственное тривиальное решение $x = 0$; для того, чтобы уравнение Фредгольма (4) имело единственное решение при любой правой части g ,

необходимо и достаточно, чтобы уравнение $A^*f = f$ имело единственное тривиальное решение $f = 0$.

Таким образом, если оператор A Фредгольма или Вольтерра является сжимающим в пространстве $L_2[a, b]$, то $x = 0$ будет единственной неподвижной точкой, и, значит, уравнение (1) Фредгольма второго рода или Вольтерра второго рода имеет единственное решение при любой правой части $y \in L_2[a, b]$.

В качестве иллюстрации принципа сжимающих отображений рассмотрено уравнение Вольтерра второго рода (8) в пространстве непрерывных функций $x, y \in C[a, b]$ с непрерывным на квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$ с ядром $\lambda K(t, s)$, где λ – параметр [2, с. 83]. Доказано, что некоторая степень оператора A является сжимающим оператором, и, значит, оператор A имеет единственную неподвижную точку. Поэтому уравнение Вольтерра второго рода (8) в пространстве непрерывных функций $x, y \in C[a, b]$ с непрерывным на квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$ ядром $\lambda K(t, s)$, имеет единственное решение при любом значении параметра λ [2, с. 83].

Очевидно, что непосредственное обобщение этого примера и применение соответствующих этих интегральных неравенств для непрерывных и ограниченных функций $x, y \in C[a, b]$ на неограниченные функции $x, y \in L_2[a, b]$ невозможно.

Установим справедливость следующего утверждения.

Пусть ядро оператора A Вольтерра функция $K(t, s)$ двух переменных t, s является ограниченной измеримой функцией. Тогда существует такое натуральное n , при котором оператор A^n будет сжимающим оператором в пространстве $L_2[a, b]$, и, значит, оператор A Вольтерра также будет сжимающим в пространстве $L_2[a, b]$.

При доказательстве учитываем, что условие ограниченности ядра Вольтерра имеет вид: $|K(t, s)| < M$, где константа $M > 0$. Пусть функции $x_1(s), x_2(s) \in L_2[a, b]$. Применяя неравенство Коши-Буняковского для функций $x_1(s) - x_2(s)$ и 1, имеем следующую цепочку очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} |(Ax_1)(t) - (Ax_2)(t)| &\leq \int_a^t |K(t, s)(x_1(s) - x_2(s))| ds \leq \\ &\leq M \int_a^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq M \sqrt{\int_a^t |x_1(s) - x_2(s)|^2 ds} \cdot \sqrt{\int_a^t 1 ds} \leq Mm(t-a)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

где

$$m = \sqrt{\int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|^2 ds} = \|x_1 - x_2\|_2$$

есть норма разности функций $x_1 - x_2$ в пространстве $L_2[a, b]$.

Используя последнее неравенство, аналогично получаем

$$\begin{aligned} |(A^2 x_1)_{(t)} - (A^2 x_2)_{(t)}| &= |A((A x_1)_{(s)} - (A x_2)_{(s)})| \leq \\ &\leq \int_a^t |K(t, s)((A x_1)_{(s)} - (A x_2)_{(s)})| ds \leq M \int_a^t |(A x_1)_{(s)} - (A x_2)_{(s)}| ds \leq \\ &\leq M \int_a^t M m(s - a)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{m M^2 (t - a)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

Таким же образом оцениваем модуль разности $(A^3 x_1)_{(t)} - (A^3 x_2)_{(t)}$:

$$\begin{aligned} |(A^3 x_1)_{(t)} - (A^3 x_2)_{(t)}| &= |A((A^2 x_1)_{(s)} - (A^2 x_2)_{(s)})| \leq \\ &\leq \int_a^t |K(t, s)((A^2 x_1)_{(s)} - (A^2 x_2)_{(s)})| ds \leq M \int_a^t |(A^2 x_1)_{(s)} - (A^2 x_2)_{(s)}| ds \leq \\ &\leq M \int_a^t \frac{m M^2 (s - a)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})} ds = \frac{m M^3 (t - a)^{\frac{5}{2}}}{(\frac{5}{2})}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, продолжая эти неравенства, по индукции приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} |(A^n x_1)_{(t)} - (A^n x_2)_{(t)}| &= |A((A^{n-1} x_1)_{(s)} - (A^{n-1} x_2)_{(s)})| \leq \\ &\leq \frac{m M^n (t - a)^{\frac{1}{2} + n - 1}}{(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + 2) \cdots (\frac{1}{2} + n - 1)} \leq \frac{m M^n (b - a)^{n - \frac{1}{2}}}{(n - 1)!} < 1 \end{aligned}$$

при достаточно большом n .

Поэтому для расстояния в метрическом пространстве $L_2[a, b]$ между двумя точками $A^n x_1$ и $A^n x_2$ для произвольных функций $x_1, x_2 \in L_2[a, b]$ приходим к следующему неравенству:



$$\begin{aligned}\rho(A^n x_1, A^n x_2) = \|A^n x_1 - A^n x_2\|_2 &\leq \sqrt{\int_a^b \left(\frac{m M^n (b-a)^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)!} \right)^2 dt} = \\ &= \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)!} \|x_1 - x_2\|_2 = \alpha \rho(x_1, x_2),\end{aligned}\quad (9)$$

где число $\alpha = \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)!} < 1$ при достаточно большом n .

В связи с этим, как следует из (9), для указанного α при некотором натуральном значении n оператор A^n , а, значит, и оператор A Вольтерра в пространстве $L_2[a, b]$ является сжимающим оператором.

Таким образом $x = 0$ является единственной неподвижной точкой и единственным решением однородного уравнения Вольтерра второго рода (2), (8)

$$Ax - x = 0.$$

Поэтому по альтернативе Фредгольма [2,3] уравнение Вольтерра второго рода (1), (7) имеет единственное решение $x \in L_2[a, b]$ при любой правой части $y \in L_2[a, b]$.

Результаты и обсуждение

Очевидно, что непосредственное обобщение метода сжимающих отображений для ограниченных [2–4] функций $x, y \in C[a, b]$ на неограниченные функции $x, y \in L_2[a, b]$ невозможно. В связи с этим установлено, что если ядро оператора A Вольтерра функция $K(t, s)$ двух переменных t, s является ограниченной измеримой функцией, то существует такое натуральное n , при котором оператор A^n будет сжимающим оператором в пространстве $L_2[a, b]$ неограниченных функций $x, y \in L_2$ и, значит, оператор A Вольтерра также будет сжимающим в пространстве $L_2[a, b]$. Поэтому, по известной [2–4] альтернативе Фредгольма, линейное интегральное неоднородное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$ неограниченных (на множестве лебеговой меры ноль) функций.

Заключение

Линейными интегральными уравнениями описываются многие задачи в экономике, маркетинге, социологии, также как и в строительной механике и в более общих разделах математической физики. В настоящей работе рассматриваются отдельные варианты решений линейных интегральных уравнения Фредгольма специального вида, в частности интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода. В зависимости от начальных условий и вида внешнего воздействия на исследуемую систему, указанные

уравнения могут не иметь ни одного решения, могут иметь либо одно единственное решение, либо иметь множество решений. Для установления разрешимости интегральных уравнений используются методы последовательных приближений, методы регуляризации, метод сжимающих отображений, методы разложения в ряды по малому параметру и некоторые другие.

В процессе исследования автором была установлена разрешимость в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$ и существование единственного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром. Применен принцип сжимающих отображений для анализа оператора Вольтерра с ограниченным ядром в приложении к следствиям теорем Фредгольма. Отметим, что для однозначной разрешимости рассматриваемых здесь интегральных уравнений Вольтерра второго рода (частный случай уравнений Фредгольма второго рода) не требуется ограничений в начальной точке на правую часть $f(x)$ уравнения, а также не требуется ограничений в начальной точке на искомое решение интегрального уравнения в отличие от интегрального уравнения Абеля, где такие ограничения необходимы для однозначной разрешимости. Более подробно эти ограничения для однозначной разрешимости интегрального уравнения Абеля рассмотрены в [13]. В связи с этим напомним, что интегральное уравнение Абеля является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра первого рода, которое, как известно, может оказаться неразрешимым.

Вышеизложенный подход установления разрешимости линейного интегрального уравнения Фредгольма (Вольтерра) второго рода может оказаться полезным при анализе разрешимости линейных интегральных уравнений, однако в пространствах функций более общих по сравнению с пространством функций непрерывных на отрезке $[a, b]$, а также $L_2[a, b]$ Вопросы применения метода сжимающих отображений к нелинейным интегральным уравнениям также будут представлять определенный интерес.

Практическая ценность представленного подхода заключается в том, что доказанная автором единственность решения гарантирует устойчивость моделей, основанных на интегральных уравнениях данного типа. Следовательно, предложенный математический метод представляется возможным использовать для построения надёжных алгоритмов прогнозирования, оценки рисков и оптимизации управления экономическими процессами. В частности, при разработке эконометрических моделей, учитывающих инерционность систем, наличие обратных связей и зависимость текущих параметров от предшествующих состояний, применение принципа сжимающих отображений обеспечивает корректность и воспроизводимость вычислений. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в финансовой математике при оценке интегрального эффекта от совокупных

инвестиций, распределённых во времени, либо при исследовании отклика экономической системы на внешние шоки.

Литература

1. Kress R. Linear Integral Equations // Applied Mathematical sciences. New York: Springer-Verlag, 1989. Vol. 82. 300 p.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. Издание седьмое. 572 с.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1993, 439 с.
4. Константинов Р.В. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие для студентов вузов по направлению "Прикладные математика и физика" / Р.В. Константинов; М-во образования и науки Российской Федерации, Федеральное агентство по образованию. М.: Московский физ.-технический ин-т (гос. ун-т), 2009. 368 с.
5. Смирнов Ю.Г. О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 38–50. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2024-1-4>.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 543с.
7. Тында А.Н. Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2025-1-5>.
8. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares //Mathematics. 2024. Vol. 12(2). P. 227. <https://doi.org/10.3390/math12020227>.
9. Богатов Е.М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е–1950-е гг.) // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 30–55. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55>.
10. Литаврин А.В. Об одном универсальном критерии неподвижной точки // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27. № 1. С. 34–48. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.27.202501.34-48>.
11. Korolev M.A. Gram's law in the theory of Riemann zeta-function. Part I // Modern problems of mathematics. 2015. Vol. 20. P. 3–161. <https://doi.org/doi.org/10.4213/spm53>.
12. Yeremin A.Yu., Kaporin I.E., Kerimov M.K. Calculation of the Riemann zeta function in a complex domain // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1985. Vol. 25. Iss. 2. P. 111–119. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(85\)90116-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(85)90116-8).
13. Шипов Н.В. К вопросу о существовании и единственности решения интегрального уравнения Абеля с непрерывно дифференцируемой



правой частью // Инновации и инвестиции. Серия: Современные технологии. 2025. № 1. С. 405–407.

References

1. Kress R. Linear Integral Equations. Applied Mathematical Sciences. Vol. 82. New York: Springer-Verlag; 1989. 300 p. (In Eng.)
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. 7th ed. Moscow: Fizmatlit; 2004. 572 p. (In Russ.)
3. Trenogin V.A. Funktsional'nyi analiz [Functional analysis]. Moscow: Nauka; 1993. 439 p. (In Russ.)
4. Konstantinov R.V. Lektsii po funktsional'nomu analizu: uchebnoe posobie dlya studentov vuzov po napravleniyu «Prikladnye matematika i fizika» [Lectures on functional analysis: study guide for university students in applied mathematics and physics]. Moscow: Moskovskii fiziko-tekhnicheskii institut (gosudarstvennyi universitet); 2009. 368 p. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. O razreshimosti integral'nogo uravneniya elektricheskogo polya dlya nepogloshchayushchikh sred [On the solvability of the electric field integral equation for non-absorbing media]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences]. 2024;(1):38–50. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2024-1-4> (In Russ., abstract in Eng.)
6. Verlan' A.F., Sizikov V.S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: spravocnoe posobie [Integral equations: methods, algorithms, programs: reference book]. Kiev: Naukova dumka; 1986. 543 p. (In Russ.)
7. Tynda A.N. Iteratsionnye metody resheniya kvadraticnykh integral'nykh uravnenii Vol'terra I roda [Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences]. 2025;(1):58–69. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2025-1-5> (In Russ., abstract in Eng.)
8. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares. Mathematics. 2024;12(2):227. <https://doi.org/10.3390/math12020227> (In Eng.)
9. Bogatov E.M. Ob istorii metoda nepodvizhnoi tochki i vklade sovetskikh matematikov (1920-e–1950-e gg.) [On the history of the fixed-point method and the contribution of Soviet mathematicians (1920s–1950s)]. Chebyshevskii sbornik [Chebyshev Collection]. 2018;19(2):30–55. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55> (In Russ., abstract in Eng.)



10. Litavrin A.V. Ob odnom universal'nom kriterii nepodvizhnoi toчки [On a universal fixed-point criterion]. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2025;27(1):34–48. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.27.202501.34-48> (In Russ., abstract in Eng.)
11. Korolev M.A. Gram's law in the theory of Riemann zeta-function. Part I. Modern problems of mathematics. 2015;20:3–161. <https://doi.org/10.4213/spm53> (In Eng.)
12. Yeremin A.Yu., Kaporin I.E., Kerimov M.K. Calculation of the Riemann zeta function in a complex domain. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1985;25(2):111–119. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(85\)90116-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(85)90116-8) (In Eng.)
13. Shipov N.V. K voprosu o sushchestvovanii i edinstvennosti resheniya integral'nogo uravneniya Abelya s nepreryvno differentsiruemoi pravoi chast'yu [On the existence and uniqueness of solutions of the Abel integral equation with a continuously differentiable right-hand side]. Innovatsii i investitsii. Seriya: Sovremennye tekhnologii [Innovations and Investments. Series: Modern Technologies]. 2025;(1):405–407. (In Russ., abstract in Eng.)

© Шипов Н.В., 2026 г.

